1)(2val) Para um sistema ligeiramente amortecido, caracterizar a resposta nas seguintes situações:

a) perturbação inicial do deslocamento;

b) solicitação harmónica $f(t) = F\cos\omega t$ para $\omega \ll \omega_n$ e para $\omega \gg \omega_n$.

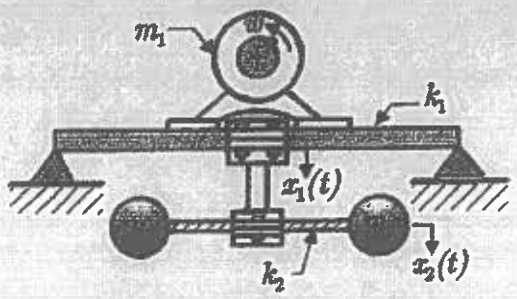
c) Definir factor de amplificação dinâmica e comentar a seguinte afirmação: " A amplitude de resposta em regime harmónico é controlada nas baixas frequências pela rigidez, nas frequências médias pelo amortecimento e nas altas frequências pela massa." Se achar conveniente, juntar um esboço gráfico.

2)(2val) A análise do comportamento dinâmico de um sistema discreto pode assentar no modelo espacial do sistema.

a) Indicar a(s) principal(s) vantagem(s) da utilização das equações de Lagrange no estabelecimento do modelo espacial. Como é considerado, normalmente, o mecanismo de amortecimento de tipo viscoso nas equações de Lagrange?

b) Indicar que tipo de acoplamento pode apresentar o modelo espacial e qual a sua origem;

c) Escrever, em notação matricial, as expressões da energia cinética e da energia potencial elástica. Caracterizar, justificando, estas duas formas energéticas.



3)(1 val) A figura representa um sistema vibratório ao qual foi acoplado um absorsor de vibrações sintonizado para a frequência de excitação.

a) Representar graficamente a amplitude de resposta do sistema principal antes e após a montagem do absorsor, indicando claramente eventuais pontos notáveis e a posição de funcionamento;

b) Referir as implicações da razão de massas no funcionamento do sistema e/ou na eficiência da solução.

4)(1 val) O isolamento de vibrações consiste em reduzir a grandeza de forças transmitidas por equipamentos para as suas fundações ou em reduzir o movimento de apoios móveis para os equipamentos.

a) Definir transmissibilidade em ambos os casos;

b) Discutir a eficiência do isolamento em termos da massa do equipamento e da rigidez da suspensão;

c) Justificar a razão pela qual, em geral, não se considera o amortecimento no dimensionamento de uma suspensão elástica;

d) Para uma excitação multi frequência, indicar, justificando, qual a frequência a considerar no dimensionamento da suspensão elástica.

5)(2 val) A resposta forçada de uma viga em flexão pode exprimir-se em termos do deslocamento lateral e/ou dos esforços internos e pode ser determinada por sobreposição modal truncada dos modos naturais de vibração.

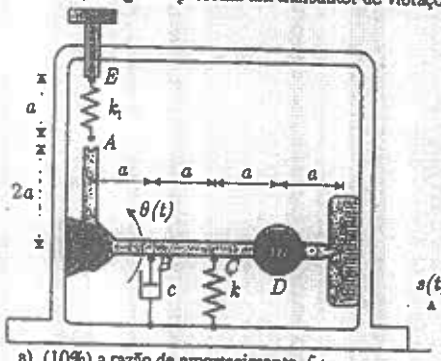
a) Estabelecer uma comparação entre a equação característica (cujas soluções são as frequências e as formas naturais de vibração) de um sistema discreto e de um sistema contínuo;

b) Escrever as propriedades de ortogonalidade (ortonormalidade) das formas naturais de vibração de uma viga em flexão;

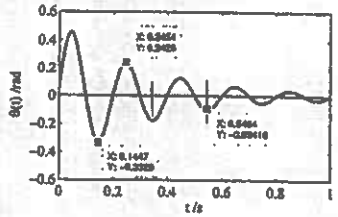
c) Discutir a selecção e a dimensão da base modal seleccionada para determinação da resposta forçada.

d) Designando as 4 primeiras frequências naturais de uma viga simplesmente apoiada por ω_1, ω_2, ω_3 e ω_4, representar graficamente a função de resposta em frequência de tipo receptância $\alpha_{\ell/2,\ell/3}(\omega)$ na banda de frequências $[0;\ 1.5\omega_4]$ indicando claramente a posição de cada uma das frequências naturais.

1) (4 val.) A figura representa um transdutor de vibrações constituído por uma barra rígida em forma de L, articulada no ponto O, com uma massa concentrada $m = 1$ kg no ponto D, ligada a um amortecedor de constante c ponto B e a uma mola linear elástica de constante k no ponto C. No ponto A pode ser ligada uma mola linear elástica de constante k_1 e comprimento livre a, sendo o seu comprimento efectivo ajustável através de um parafuso.



Antes de utilização, o mecanismo do transdutor foi sujeito a um teste em regime livre, tendo sido registada a resposta $\theta(t)$ representada no gráfico. Determinar,



a) (10%) a razão de amortecimento ξ;

b) (10%) a frequência angular natural não amortecida ω_n.

Considerando a mola AE livre (não actuante), assumindo a hipótese de pequenas oscilações e considerando desprezável a inércia da barra, estabelecer:

c) (25%) a equação diferencial (linearizada) do movimento.

d) (10%)Determinar a constante de amortecimento c e a constante de rigidez k;

Para ensaiar o transdutor, aplicou-se um deslocamento harmónico $s(t) = S \sin \omega t$ com uma amplitude $S = 5$ mm e uma frequência $\omega = 3$ Hz.

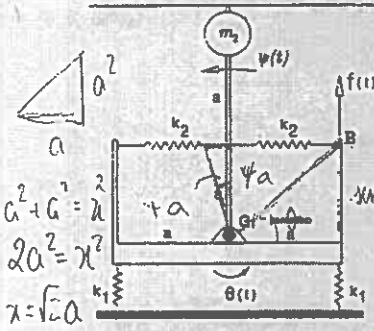
e) (15%) determinar a amplitude S_l lida na régua do transdutor e o respectivo erro ε.

Para corrigir o valor lido, ajustou-se o parafuso da mola AE de modo a comprimir a mola para dois terços do seu comprimento livre (elongação $\delta = \frac{1}{3}a$).

f) (10%)Reescrever a equação diferencial do movimento;

Para uma rigidez $k_1 = 4k$,

g) (10%)Calcular a nova frequência natural e o novo valor lido na régua.



2) (4 val.) O sistema representado na figura é constituído por:

- Corpo 1 - uma estrutura rígida, de massa m_1 e momento de inércia J_{G_1}, ligada ao exterior no ponto G_1 por uma articulação e por duas molas lineares elásticas de igual rigidez k_1. Sobre esta estrutura actua uma força $f(t)$ no ponto B.
- Corpo 2 - uma massa m_2, suportada por uma barra rígida de massa e inércia não considerável, ligada ao exterior pela articulação anterior e ligada ao corpo 1 por duas molas lineares de igual rigidez k_2.

As vibrações do sistema em torno da posição de equilíbrio estático podem ser descritas pelas coordenadas generalizadas $\theta(t)$ e $\psi(t)$.

a) (30%) Estabelecer, literalmente, as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.

Considerando os dados abaixo indicados, determinar:

$$k_1 = 5k \qquad k_2 = 2k \qquad J_{G_1} = 8ma^2 \qquad m_2 = m \qquad a = 0.5\text{m}$$

b) (15%) as frequências e formas naturais de vibração do sistema. Esboçar e comentar as formas naturais de vibração;

c) (15%) as equações do movimento do sistema na base modal;

Tomando para valores de k e m os abaixo indicados, determinar:

$$k = 20000 \text{ N/m} \qquad m = 0.6 \text{ kg}$$

d)(10%) o valor máximo da resposta $\theta(t)$ quando $f(t) = F\delta(t)$ (solicitação impulso de valor F aplicada no instante inicial).

e)(10%) a amplitude $\Psi(\omega)$ da resposta $\psi(t)$ da barra quando $f(t) = F\cos\omega t$ com $\omega = 25$ rad/s.

f)(20%) Tendo em conta a solicitação da alínea anterior, alterar a distância entre a massa concentrada m e o ponto G_1 de forma a que a amplitude $\Psi(\omega)$ da sua resposta seja reduzida de 5%.

3) (4 val.) Na figura representa-se um modelo simplificado das asas e da fuselagem de uma aeronave. As asas são modelizadas por duas vigas de comprimento ℓ ligadas rigidamente entre si por uma massa concentrada m que representa a fuselagem. As vigas têm uma secção recta de área A e momento de 2ª ordem I, e o material possui módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ. O modelo considerado está livre-livre e possui um modo de corpo rígido (translação) com energia elástica nula e frequência também nula.

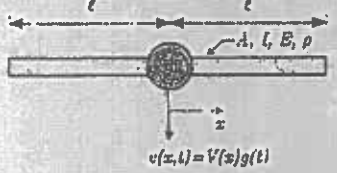
a) (15%) Escrever e classificar as condições de fronteira do sistema.

b) (15%) Discutir, justificando, a aplicabilidade da função $V(x) = \frac{1}{3} - \frac{x^2}{\ell^2}$ como aproximação da primeira forma natural de vibração (com energia elástica não nula) no método da energia de Rayleigh. Esboçar graficamente a função $V(x)$.

c) (30%) Calcular a estimativa da frequência natural de vibração utilizando o quociente de Rayleigh. Exprimir o resultado em função de $\varepsilon = \frac{m}{2\rho A\ell}$.

d) (20%) Indicar os valores exactos da frequência natural para os casos limite: $m \to 0$ e $m \to \infty$.

e) (20%) Discutir a validade da solução fornecida pelo quociente de Rayleigh para os valores limite: $m \to 0$ e $m \to \infty$. Se necessário, propor uma solução alternativa para a função de aproximação $V(x)$.



Exame de Recurso – 2007 - 07 - 12

Parte Prática

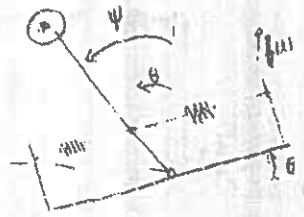
2. a) Admitindo [illegible] pequenos, [illegible] $\cos\psi \approx 1$

$$T = \frac{1}{2} J_{G_1} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{d}{dt} \left(2a \sin \psi(t) \right) \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} J_{G_1} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \underbrace{2a m_2}_{4a^2} \dot{\psi}^2$$

$$V = \left[\frac{1}{2} K_1 \left(a \sin \theta(t) \right)^2 \right] \times 2 + \left(\frac{1}{2} K_2 \left(a \sin \overbrace{(\psi(t) - \theta(t))}^{\psi(t)-\theta(t)} \right)^2 \right) \quad 2$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{2} \cdot 2a^2 K_1 \theta^2(t) + \frac{1}{2} a^2 K_2 (\psi(t) - \theta(t))^2$$



$f(t)\, a\, \theta$

$f(t)\, a$

Forças não conservativas:

$$Q_1 = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(f(t) \cdot a \sin \theta \right) = a \cdot f(t)$$

$$Q_2 = \frac{\partial}{\partial \psi} \left(f(t)\, a \sin \theta \right) = 0$$

50

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = J_{G_1} \dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = J_{G_1} \ddot{\theta}(t)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = 2a^2 K_1 \theta(t) - a^2 K_2 (\psi(t) - \theta(t))$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = 2a m_2 \dot{\psi} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) = 2a m_2 \ddot{\psi}(t)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial \psi} = a^2 K_2 (\psi(t) - \theta(t))$$

Logo:

$$\begin{cases} J_{G_1} \ddot{\theta}(t) + (2a^2 K_1 + a^2 K_2)\theta(t) - a^2 K_2 \psi(t) = a^2 f(t) \\ 2a m_2 \ddot{\psi}(t) - a^2 K_2 \theta(t) + a^2 K_2 \psi(t) = 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 8ma^2 & 0 \\ 0 & 2am \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{\psi}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 12a^2 K & -2a^2 K \\ -2a^2 K & 2a^2 K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ \psi(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a^2 f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Fazendo $\begin{Bmatrix} \theta(t) \\ \psi(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \cos(\omega t - \phi)$ e considerando regime livre

$$\begin{bmatrix} 12a^2 K - 8ma^2 \omega^2 & -2a^2 K \\ -2a^2 K & 2a^2 K - 2am\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

u_2 u_1

$\frac{1}{2} K_2 (-K_1)$

$\frac{1}{2} K_1 u^2 + \frac{1}{2} K$

Calculando o det. característico:

$$\begin{vmatrix} 11a^2K - 5m^2\omega^2 & -2a^2K \\ -2a^2K & 2a^2K - 18a\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \overset{a=0,5}{\Rightarrow} \Leftrightarrow \omega_1 \cong 0,6226\sqrt{\frac{K}{m}} \ V$$

$V\ \omega_2 \cong 1,2698\sqrt{\frac{K}{m}}$

1ª Forma Natural:

$$(12\times 0,5^2 K - 8m\,0,5^2\left(0,6226\sqrt{\frac{K}{m}}\right)^2)\,\mu_1 - 2\times 0,5^2\times K\,\mu_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mu_1 \cong 0,2247\,\mu_2$$

$$\{\mu\}_1 = \begin{Bmatrix} 0,2247 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

2ª Forma Natural:

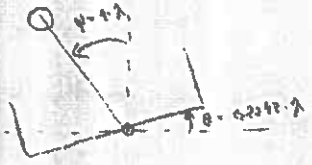
$$(12\times 0,5^2 K - 8m\,0,5^2\left(1,2698\sqrt{\frac{K}{m}}\right)^2)\,\mu_1 - 2\times 0,5^2\times K\,\mu_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mu_1 \cong -2,2244\,\mu_2$$

$$\{\mu\}_2 = \begin{Bmatrix} -2,2244 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Esboço:

1ª Forma Natural:



2ª Forma Natural.



Comentário: No 1º modo o movimento é em fase com o 2º o movimento é em oposição de fase.

c) Normalização.

$$\{\phi\}_i = \frac{1}{\sqrt{\{\mu\}_i^T [m] \{\mu\}_i}} \{\mu\}_i$$

$$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\sqrt{0,5505}} \begin{Bmatrix} 0,2247 \\ 1 \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} 0,3029 \\ 1,3478 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{1}{\sqrt{5,4480}} \begin{Bmatrix} -2,2244 \\ 1 \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} -0,9530 \\ 0,4284 \end{Bmatrix}$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0,3029 & -0,9530 \\ 1,3478 & 0,4284 \end{bmatrix}$$

$$[I]\{\ddot{q}(t)\} + [\Omega^2]\{q(t)\} = [\Phi]^T\{f(t)\} \Rightarrow$$

de substituindo $K = 20000\ N/m$ e $m = 0,5\ Kg$:

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{q}_1(t) + 124,52^2\, q_1(t) = 0,3029 \times a^2 f(t) \\ \ddot{q}_2(t) + 253,96^2\, q_2(t) = -0,9530 \cdot a^2 f(t) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{q}_1(t) + 124,52^2\, q_1(t) = 0,075725\, f(t) \\ \ddot{q}_2(t) + 253,96^2\, q_2(t) = -0,23825\, f(t) \end{cases}$$

d) Como o impulso é aplicado em $t = 0$:

$$q_1(t) = 0,075725\, F \cdot \frac{1}{\underbrace{m_q}_{1} \underbrace{\omega_q}_{124,52}} \sin\omega_q t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow q_1(t) = 6,081 \times 10^{-4} F \sin 124,52 t$$

$$q_2(t) = -0,23825 \cdot \frac{1}{253,96} \sin 253,96 t = -9,379 \times 10^{-4} F \sin 253,96 t$$

Então, como $\{x(t)\} = [\Phi]\{q(t)\}$

$$\theta(t) = 0,3029\, q_1(t) - 0,9530\, q_2(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta(t) = 1,842 \times 10^{-4} F \sin 124,52 t + 8,940 \times 10^{-4} F \sin 253,96 t$$

Então o que podemos afirmar:

$$\theta(t)_{max} \leq 1,842 \times 10^{-4} F + 8,940 \times 10^{-4} F \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta(t)_{max} \leq 1,078 \times 10^{-3} \cdot F}$$

e) Pela alínea b):

$$\begin{bmatrix} 12a^2K - 8ma^2\omega^2 & -2a^2K \\ -2a^2K & 2a^2K - 2am\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta(\omega) \\ \Psi(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Indo à pág. 186:

$$(9.19) \rightarrow \Psi(\omega) = \frac{0 - (-2a^2K)F}{(12a^2K - 8ma^2\omega^2)(2a^2K - 2am\omega^2) - (-2a^2K)^2}$$

Para: $a = 0,5\ m$; $K = 20000\ N/m$; $m = 0,5\ kg$; $\omega = 25\ rad/s$

$$\Psi(\omega) \cong 2,109 \times 10^{-5} F$$

f) Repetem que apenas a altura da haste varia (não muda o tamanho do corpo 1). Também parece claro que a altura de acção dos motores K_2 também não muda, pelo que considerarei que apenas a distância "a" dos motores até à massa muda.

Assim, na alínea a) o único termo que muda no formalismo de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) = (a+b)\, m_2\, \ddot{\psi}(t)$$

Ficando

$$\begin{bmatrix} 12a^2K - 8ma^2\omega^2 & -2a^2K \\ -2a^2K & 2a^2K - (a+b)m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} G(\omega) \\ \psi(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Logo, $k_1 = 1{,}5 \times 10^5$ N/m

$$\psi(\omega) = \frac{-(-2a^2K)F}{(12a^2K - 8ma^2\omega^2)(2a^2K - (a+b)m\omega^2) - (-2a^2K)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = -0{,}8979 \text{ m}$$

Não deve ser para mudar só aquele troço de treliça.

Deve considerar-se que as molas k_2 continuam a meio da treliça mas agora a uma distância b de G_1, e reforçar a alínea a).

(93)

3. a)

$$EI \left.\frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2}\right|_{x=-l} = 0 \Leftrightarrow \left.\frac{d^2 V(x)}{dx^2}\right|_{x=-l} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI \left.\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=-l}\right) = 0 \Leftrightarrow \left.\frac{d^3 V(x)}{dx^3}\right|_{x=-l} = 0 \quad (2)$$

$$EI \left.\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=l} = 0 \Rightarrow \left.\frac{d^2 V(x)}{dx^2}\right|_{x=l} = 0 \quad (3)$$

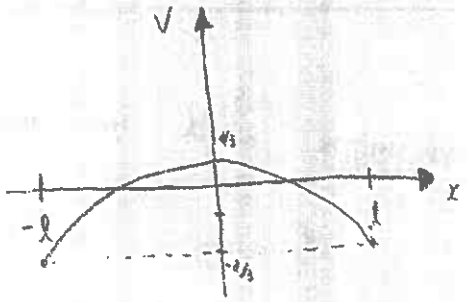
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI \left.\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=l}\right) = 0 \Rightarrow \left.\frac{d^3 V(x)}{dx^3}\right|_{x=l} = 0 \quad (4)$$

Todas as condições fronteira são naturais

b) Tem de ser derivável 2 vezes (pelo menos), uma vez que o problema de vibração de uma viga à flexão é de 4ª ordem na variável espacial:

$$\frac{dV(x)}{dx} = -\frac{2x}{l^2} \quad ; \quad \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -\frac{2}{l^2}$$

Tem de verificar as condições fronteira geométricas, que neste caso não existem, não é necessário fazer mais nenhuma verificação. A função é admissível



c)

$$V_{max} = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l} EI\left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)^2 dx + \cancel{V_{cfa}}^{=0} =$$

$$= \frac{EI}{2}\int_{-l}^{l}\left(-\frac{2}{l^2}\right)^2 dx = \frac{EI}{2}\cdot\frac{4}{l^4}\cdot(l-(-l)) =$$

$$= \frac{EI}{2}\cdot\frac{8l}{l^4}$$

$$T_{max} = \omega^2\left(\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\rho A\,(V(x))^2\,dx + \frac{1}{2}\,m\,(V(x)|_{x=0})^2\right) =$$

$$= \omega^2\left(\frac{\rho A}{2}\int_{-l}^{l}\left(\frac{1}{3}-\frac{x^2}{l^2}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\,m\left(\frac{1}{3}\right)^2\right) =$$

$$= \omega^2\left(\frac{\rho A}{2}\left(\frac{4l}{45}-\left(-\frac{4l}{45}\right)\right) + \frac{1}{2}\,\frac{m}{9}\right) =$$

$$= \omega^2\left(\frac{\rho A}{2}\cdot\frac{8l}{45} + \frac{1}{2}\cdot\frac{m}{9}\right)$$

$$R(V(x)) = \omega^2 = \frac{\frac{EI}{\cancel{2}}\cdot\frac{8l}{l^4}}{\frac{\rho A}{\cancel{2}}\,\frac{8l}{45} + \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{m}{9}} =$$

$$= \frac{EI}{\rho A l^4}\,\frac{1}{\frac{1}{45}+\frac{m}{72\rho A l}} = \frac{EI}{\rho A l^4}\cdot\frac{45}{1+\frac{5}{4}\cdot\underbrace{\frac{m}{2\rho A l}}_{=\varepsilon}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^{ar} = \sqrt{\frac{45}{1+\frac{5}{4}\varepsilon}}\cdot\sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

d) $m \to 0$: Viga livre-livre:

fág. 359 $\to$ $\beta_2 l_{(2l)} = 4{,}7300 \Rightarrow \omega^{ar} = (4{,}7300)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} =$

$$= 22{,}3729\sqrt{\frac{EI}{\rho A\,(2l)^4}} = \frac{22{,}3729}{2^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \cong 5{,}5932\sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

$m \to \infty$:

$$EI\,\frac{d^3V(x)}{dx^3}\Big|_{x=0} = \frac{1}{2}\,m\,(V(x)|_{x=0})^2 \Rightarrow$$

$$\frac{d^3V(x)}{dx^3}\Big|_{x=0} \longrightarrow \infty$$

A viga não consegue mover a massa porque esta tem

uma inércia muito grande! Equivale a um apoio simples. Logo:

$$V(x)\Big|_{x=0} = 0$$

Portanto há um nodo para $x=0$ fazendo com que a viga oscile segundo o 2º modo de vibração (consideramos o 1º como o modo com frequência não nula).

$$\beta_2 l = \omega^* = 7,8532 \Rightarrow \omega = 7,8532^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A (\alpha l)^4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = 95,4982 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

e) Para $m \to 0$ as condições fronteira não se alteram. No entanto quando $m \to \infty$ a viga passa a ter um nodo para $x=0$ pelo que a função $V(x)$ deixa de ser admissível. Para este caso uma função possível poderia ser:

$$V(x) = \frac{x^2}{l^2}$$

Embora não seja a melhor aproximação.

Exame de 2007/07/12

PARTE PRÁTICA

②

a) $T = \frac{1}{2} J_{G_1} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{d}{dt}\left(2a \underbrace{\operatorname{sen}\psi(t)}_{=\psi}\right)\right)^2 =$

$= \frac{1}{2} J_{G_1} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot 4a^2 \dot{\psi}^2$

$V = 2 \times \left(\frac{1}{2} K_1 (a \underbrace{\operatorname{sen}\theta}_{=\theta})^2 \right) + \left(\frac{1}{2} K_2 \left(a \operatorname{sen}\psi - a \operatorname{sen}\theta \right)^2 \right) \times 2$

$= \frac{1}{2} K_1 \, 2a^2 \theta^2 + \frac{1}{2} 2a^2 K_2 (\psi - \theta)^2$

$Q_1 = \frac{d}{d\theta}\left(f(t) \cdot a \underbrace{\operatorname{sen}\theta}_{=\theta} \right) = a f(t)$

$Q_2 = \frac{d}{d\psi}\left(f(t) \cdot a \operatorname{sen}\theta \right) = 0$

$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = J_{G_1} \dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = J_{G_1} \ddot{\theta}$

$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \; ; \; \frac{\partial V}{\partial \theta} = 2a^2 K_1 \theta - 2a^2 K_2 (\psi - \theta)$

$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = m_2 \cdot 4a^2 \cdot \dot{\psi} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) = m_2 \cdot 4a^2 \ddot{\psi}$

$\frac{\partial T}{\partial \psi} = 0 \; ; \; \frac{\partial V}{\partial \psi} = 2a^2 K_2 (\psi - \theta)$

Eq. de Lagrange:

$$\begin{cases} J_{G_1} \ddot{\theta} + 2a^2 K_1 \theta - 2a^2 K_2 (\psi - \theta) = a f(t) \\ m_2 4a^2 \ddot{\psi} + 2a^2 K_2 (\psi - \theta) = 0 \end{cases}$$

Eq. matricial:

$$\begin{bmatrix} J_{G_1} & 0 \\ 0 & m_2 4a^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{\psi}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2a^2 K_1 + 2a^2 K_2 & -2a^2 K_2 \\ -2a^2 K_2 & 2a^2 K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ \psi(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) Substituindo os valores:

$$\begin{bmatrix} 16m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{\psi}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3,5K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta(t) \\ \psi(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a\beta(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \theta(t) \\ \psi(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \cos(\omega t - \phi)$$

$$\left[[K] - \omega^2[m]\right]\{u\} = \{0\}$$

$$\begin{bmatrix} 3,5K - 16m\omega^2 & -K \\ -K & K - \omega^2 m \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3,5K - 16m\omega^2 & -K \\ -K & K - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{cases} \omega_1 = 0,38157\sqrt{\frac{K}{m}} \\ \omega_2 = 1,02593\sqrt{\frac{K}{m}} \end{cases}$$

1ª forma natural:

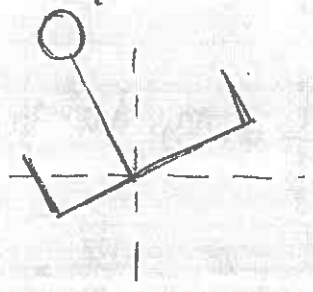
$$-K u_1 + (K - \omega^2 m) u_2 = 0$$

$$K u_1 = \left(K - 0,38157^2 \cdot \frac{K}{m} \cdot m\right) u_2$$

$$u_1 = (1 - 0,38157^2)\, u_2$$

$$u_1 = 0,8544\, u_2$$

$$\{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 0,8544 \\ 1 \end{Bmatrix}$$



Movimento em fase

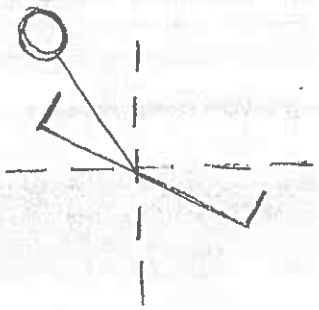
2ª forma natural:

$$-K u_1 + \left(K - 1,02593^2 \frac{K}{m} \cdot m\right) \cdot u_2 = 0$$

$$u_1 = (1 - 1,02593^2)\, u_2$$

$$u_1 = -0,0731\, u_2$$

$$\{u\}_2 = \begin{Bmatrix} -0,0731 \\ 1 \end{Bmatrix}$$



c) $$\{\phi\}_2 = \frac{1}{\sqrt{\{u\}_1^T [m] \{u\}_1}} \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} \frac{0,2399}{\sqrt{m}} \\ \frac{0,2808}{\sqrt{m}} \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{1}{\sqrt{\{u\}_2^T [m] \{u\}_2}} \{u_2\} = \begin{Bmatrix} -\frac{0,0702}{\sqrt{m}} \\ \frac{0,9598}{\sqrt{m}} \end{Bmatrix}$$

$$[\phi] = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0,2399 & -0,0702 \\ 0,2808 & 0,9598 \end{bmatrix}$$

$$[I]\{\ddot{\eta}(t)\} + [\Lambda^2]\{\eta(t)\} = [\phi]^T \{f(t)\}$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,38157^2 \, K/m & 0 \\ 0 & 1,03593^2 \, K/m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0,2399 & -0,0702 \\ 0,2808 & 0,9598 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} f(t) \, a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

d) $K = 20000 \, N/m$ e $m = 0,5 \, kg$

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 5823,827 \, \eta_1(t) = 0,3393 \times 0,5 \, f(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) + 42926,04 \, \eta_2(t) = -0,3971 \times 0,5 \, f(t) \end{cases}$$

$$\eta_1(t) = 0,3393 \times 0,5 \, F \cdot \frac{1}{m_{eq} \, \omega_1} \cdot e^{\circ} \operatorname{sen} \omega_1 t$$

$$1 \quad \quad 76,314$$

$$= 2,22E\text{-}3 \, F \cdot \operatorname{sen}(76,314t)$$

$$\eta_2(t) = -0,3971 \times 0,5 \, F \cdot \frac{1}{m_{eq} \, \omega_2} e^{\circ} \operatorname{sen} \omega_2 t$$

$$1 \quad \quad 207,186$$

$$= -9,583 \times 10^{-4} \, F \operatorname{sen}(207,186t)$$

Como $\{x(t)\} = [\phi]\{\eta(t)\}$

$\theta(t)_{máx} = 0{,}2399\ \eta_1(t) - 0{,}0702\ \eta_2(t)$

$\theta(t)_{máx} = 5{,}326\times10^{-4}F\,sen(76{,}314t) + 6{,}73\times10^{-5}F\,sen(207{,}186t)$

$\theta(t)máx \leq 5{,}326\times10^{-4}F + 6{,}73\times10^{-5}F \leq 6{,}0\times10^{-4}F$

e) $\psi(w) = ?$ para $f(t) = F\cos\omega t$ com $\omega = 25$ rad/s

De b):

$$\begin{bmatrix} 3{,}5K - 16m\omega^2 & -K \\ -K & K - \omega^2 m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta(w) \\ \psi(w) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\psi(x) = \frac{0 - (-K)\times(F)}{(3{,}5K - 16m\omega^2)(K - \omega^2 m) - (-K)^2}$$

$$= \frac{20000\,F}{(3{,}5\times20000 - 16\times0{,}5\times25^2)(20000 - 25^2\times0{,}5) - 20000^2}$$

$$= 2{,}27\times10^{-5}F$$

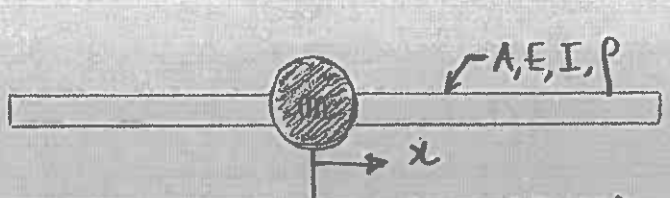
f) $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) = m_2\cdot(a+b)^2\cdot\ddot{\psi}$

$$\begin{bmatrix} 3{,}5K - 16m\omega^2 & -K \\ -K & K - \omega^2(a+b)^2 m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta(w) \\ \psi(w) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\psi(w) = 2{,}27\times10^{-5}F\times0{,}05 = \frac{20000F}{(3{,}5\times20000 - 16\times0{,}5\times25)^2(20000 - 25^2(0{,}5+b)^2\times0{,}5) - 2000}$$

$b = \begin{matrix} ? \\ 0 \end{matrix}$

(3.)



a) Para:

$x = -\ell$: (1): $EI \left.\dfrac{d^2V(x)}{dx^2}\right|_{x=-\ell} = 0$

(2): $EI \left.\dfrac{d^3V(x)}{dx^3}\right|_{x=-\ell} = 0$

$x = \ell$: (3): $EI \left.\dfrac{d^2V(x)}{dx^2}\right|_{x=\ell} = 0$

(4): $EI \left.\dfrac{d^3V(x)}{dx^3}\right|_{x=\ell} = 0$

1, 2, 3, 4 ⇓ C.F. naturais

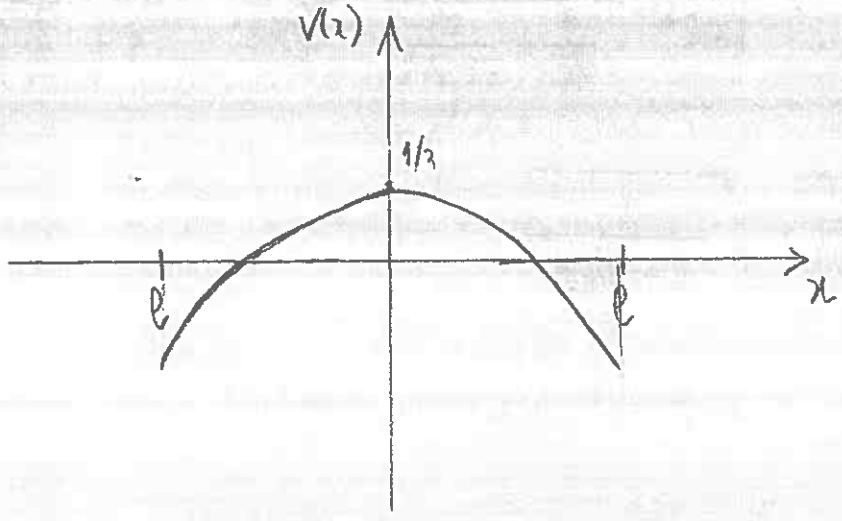
b) $V(x) = \frac{1}{3} - \frac{x^2}{\ell^2}$

• Derivável pelo menos 2 vezes (prob de 4ª ordem):

$\dfrac{dV(x)}{dx} = -\dfrac{2x}{\ell^2}$; $\dfrac{dV^2(x)}{dx^2} = -\dfrac{2}{\ell^2}$ ✓

• Verificar condições fronteiriças geométricas

não existem → Função admissível. ✓



c) $V_{max} = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} EI\left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)^2 dx + \cancel{V(q_m)} =$

$= \frac{1}{2} EI \int_{-\ell}^{\ell} \left(-\frac{2}{\ell}\right)^2 dx = \frac{EI}{2}\cdot\frac{4}{\ell^2}\cdot(\ell-(-\ell)) = \frac{EI}{2}\cdot\frac{8\ell}{\ell^4}$

$T_{max} = \omega^2\left(\frac{1}{2}\int_{-\ell}^{\ell} \rho A\, V(x)^2 dx + \frac{1}{2} m\, V(0)^2\right)$

$= \omega^2\left(\frac{\rho A}{2}\int_{-\ell}^{\ell}\left(\frac{1}{3}-\frac{x^2}{\ell^2}\right)^2 dx + \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) =$

$= \omega^2\left[\frac{\rho A}{2}\int_{-\ell}^{\ell}\left(\frac{1}{9}-\frac{2x^2}{3\ell^2}+\frac{x^4}{\ell^4}\right)dx + \frac{1}{2} m \frac{1}{9}\right] =$

$= \omega^2\left[\frac{\rho A}{2}\left(\frac{1}{9}x - \frac{2}{3\ell^2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{\ell^4}\cdot\frac{x^5}{5}\right)_{-\ell}^{\ell} + \frac{1}{2} m \frac{1}{9}\right] =$

$= \omega^2\left[\frac{\rho A}{2}\left(\frac{\ell}{9} - \frac{2\ell^3}{9\ell^2} + \frac{\ell^5}{\ell^4 5} + \frac{\ell}{9} - \frac{2\ell^3}{9\ell^2} + \frac{\ell^5}{\ell^4 5}\right) + \frac{1}{2} m \frac{1}{9}\right]$

$= \omega^2\left(\frac{\rho A}{2}\cdot\frac{8\ell}{45} + \frac{1}{2}\frac{m}{9}\right)$

$R(V(x)) = \omega^2 = \frac{\frac{EI}{2}\cdot\frac{8\ell}{\ell^4}}{\frac{\rho A}{2}\cdot\frac{8\ell}{45} + \frac{1}{2}\frac{m}{9}} = \frac{EI}{\rho A \ell^4}\cdot\frac{8\ell}{\frac{8\ell}{45}+\frac{m}{\rho A 9}} =$

$= \frac{EI}{\rho A \ell^4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{45}+\frac{m}{72\rho A\ell}} = \frac{EI}{\rho A\ell^4}\cdot\frac{45}{1+\frac{5}{4}\cdot\frac{m}{2\rho A\ell}} = \varepsilon$

$\omega^e = \sqrt{\frac{EI}{\rho A\ell^4}}\cdot\sqrt{\frac{1}{1+5/4\,\varepsilon}}$

d) Quando $m \to 0 \Rightarrow$ livre-livre:

$$\beta_2 \underbrace{l}_{(2l)} = 4{,}7300 \quad \therefore \quad w_2^e = (4{,}7300)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A (2l)^4}}$$

Quando $m \to \infty$:

$$EI \left.\frac{d^3 V(x)}{dx^3}\right|_{x=0} = \frac{1}{2} m V(0)^2 \quad \therefore$$

$$\frac{d^3 V(x)}{dx^3} \to \infty \quad \Rightarrow \quad \text{Apoio simples } (V(0) = 0)$$

Há um modo para $x = 0$ fazendo com que a viga vibre segundo o 2º modo de vibração (considerando o 1º, como sendo o modo com frequência não nula).

$$\beta_3 l_{(2l)} = 7{,}8532 \Rightarrow w_3^e = 7{,}8532^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A (2l)^4}}$$

e) Para $m \to 0$, as CF não se alteram.

Para $m \to \infty$, a viga passa a ter um modo para $x = 0$, pelo que $V(x)$ deixa de ser admissível. Função possível:

$$V(x) = \frac{x^2}{l^2}$$

PARTE TEÓRICA

(2.)

a) A principal vantagem da utilização das equações de Lagrange consiste na não necessidade de recorrer a diagramas de corpo livre dos componentes de um sistema dinâmico.

O amortecimento viscoso é normalmente definido por:

$$Q_i = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \quad , i = 1 \dots n$$

Com: $F = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} C_{rs}\, \dot{q}_r \dot{q}_s$, sendo $\dot{q}$ as velocidades generalizadas e C_{rs} os coeficientes de amortecimento, simétricos em r e s.

b) Tipos de acoplamento: acoplamento de inércia, de rigidez e/ou de amortecimento.

Estes acoplamentos são o resultado de uma interação entre o movimento das várias massas do sistema que se influenciam mutuamente.

c) $T = \frac{1}{2} \{\dot{\theta}\}^T [m] \{\dot{\theta}\}$ $\qquad V = \frac{1}{2} \{\theta\}^T [K] \{\theta\}$

↳ Energia cinética:

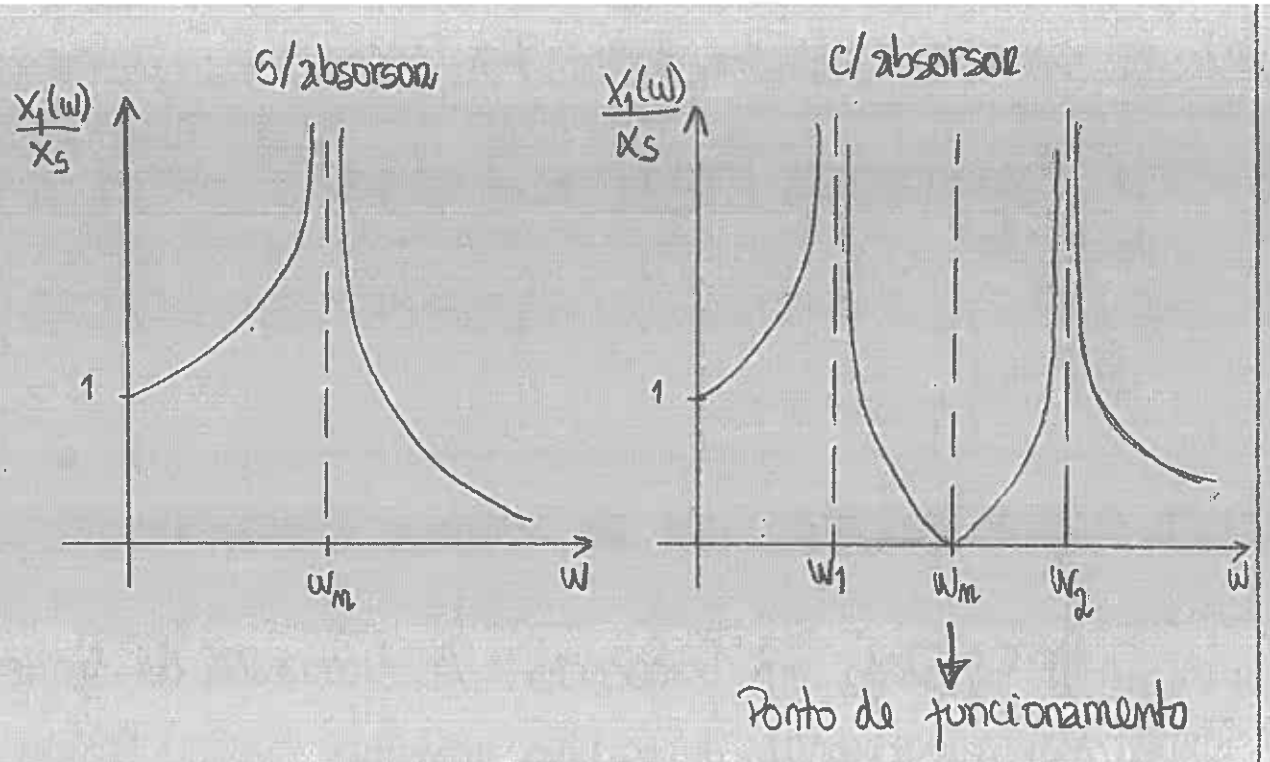
Não pode ser negativa e apenas é nula quando todas as velocidades forem nulas. É portanto, uma forma quadrática definida positiva, sendo a matriz de massa designada por matriz definida positiva.

↳ Energia potencial

É em geral uma forma quadrática definida positiva e a matriz rigidez é definida positiva. No entanto, em sistemas semi-definidos a energia pot. pode ser nula sem que todos os deslocamentos o sejam. Neste caso diz-se que a energia pot. é uma função quadrática semi-definida positiva e a matriz rigidez também.

(3.)

a)



b) O aumento da razão de massas conduz a um afastamento das frequências naturais w_1 e w_2 do sistema tornando viável a excitação do sistema para uma banda de frequências mais alargada. A solução torna-se mais eficiente p/ valores próximos da frequência de sintonização.

(5.)

a) Não considerando o amortecimento: $[m]\{\ddot{x}(t)\}+[K]\{x(t)\}=0$

$([K]-w^2[m])\{u\}\cos(wt-\phi)=\{0\}$ (1)

$|[K]-w^2[m]|=0 \Rightarrow$ obtém-se frequências naturais

Substituindo em (1): obtém-se formas naturais.

No caso de 1 sistema contínuo: $-\mathcal{L}[K(x)\mathcal{L}(V(x))]=w^2 m(x)V(x)$

As soluções $V(x)$ têm de verificar a eq. diferencial e as condições fronteira. Assim, a solução da eq. característica de 1 problema contínuo é constituída por uma infinidade de pares característicos formados por um valor característico e pela respectiva função característica.

b) $$\int_0^\ell \rho A(x)\, V_r(x) V_s(x)\, dx = \delta_{rs}$$

com $r, s = 1, 2 \ldots \infty$

$$\int_0^\ell \frac{d^2 V_r(x)}{dx^2} EI(x) \frac{d^2 V_s(x)}{dx^2}\, dx = \omega_r^2 \delta_{rs}$$

$$\delta_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{se } r = s \\ 0 & \text{se } r \neq s \end{cases}$$

c) A resposta forçada pode ser expressa em termos de ~~deslocamento~~, ~~momento flector~~, ~~esforço transverso~~ e nas várias funções de resposta em frequência. A dimensão da base modal varia, devendo a escolha assentar numa banda de frequências próximas das frequências de excitação.

d) $\alpha_{\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{3}}(\omega)$ em $[0\,;\, 1{,}5\,\omega_4]$

